Übungsklausur Geometrie 2 (Trinkglas)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) a) Weise nach, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallel zur Ebene $E: 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2$ ist.

b) Berechne den Abstand der Geraden g von der Ebenen E. (3,5VP)

2) a) Überprüfe in welcher der Ecken $A(8|1|10)$, $B(5|0|9)$ oder $C(4|2|10)$ das Dreieck ABC einen rechten Winkel hat.

b) Ergänze das rechtwinklige Dreieck so durch einen Punkt D, dass das entstandene Viereck ein Rechteck ist. (3,5VP)

3) Eine Gerade verläuft durch die Punkte $A(6|3|4)$ und $B(8|1|6)$.
Berechne den Abstand des Punktes $P(6|0|4)$ zur Geraden durch A und B. (3VP)

4) Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Geraden.

b) Bestimme $a > 0$ so, dass der Abstand der Geraden 2 beträgt. (3VP)

5) Die Geradengleichung von g: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ wird in die Koordinatengleichung der Ebene $E: x_1 - x_2 = 1$ eingesetzt: $1 - t = 1$. Man erhält $t = 0$.
Das bedeutet:

☐ A: g in E

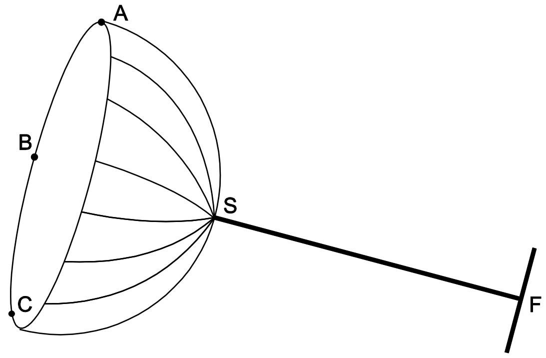
☐ B: g parallel E

☐ C: g schneidet E

☐ D: die Gerade verläuft durch den Ursprung

Kreuze die richtige(n) Antwort(en) an und begründe kurz den (die) angekreuzten Punkt(e). (2VP)

Übungsklausur Geometrie 2 (Trinkglas)
Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)



In einer Festhalle wird ein Modell eines Trinkglases aufgehängt.
Das Glas kann als Halbkugel mit geradlinigem Stiel betrachtet werden.
Die Punkte $A(5|23|20)$, $B(0|20|16)$ und $C(5|17|12)$ liegen auf dem kreisförmigen Glasrand. Im Punkt $S(5|24|13)$ ist der Stiel befestigt.
Boden und Decke der Festhalle sind parallel zur x_1x_2-Ebene.
Alle Angaben sind in Meter. Die Glasdicke für das Modell wird nicht berücksichtigt.

a) (1) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der der Glasrand mit den Punkten A, B und C liegt. (Zwischenergebnis: $E: -4x_2 + 3x_3 = -32$)
(2) Berechne den Schnittwinkel dieser Ebene mit der Bodenebene.
(3) Berechne den Abstand des Punktes S von der Ebene E. (5VP)

b) (1) Es wird das Lot von S auf die Ebene E gefällt. Der Lotfußpunkt ist der Mittelpunkt M des Glasrandkreises.
Bestimme die Koordinaten von M.
(2) Bestimme die Koordinaten des Fußpunktes F des 7m langen Glasmodellstiels, der in Richtung der Verlängerung der Strecke MS verläuft. (4VP)

c) In der Halle wird entlang der Geraden $g_{\text{Licht}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lichterkette aufgehängt.

Weise nach, dass für den Punkt A des Glasmodells ein Sicherheitsabstand zur Lichterkette von mindestens 2m eingehalten wird. (3VP)

d) In das Glasmodell wird eine Pyramide mit einer Halogenlampe eingebaut.
Die Punkte A,B,C und $D(10|20|16)$ bilden die quadratische Grundfläche der Pyramide.
Ihre Spitze ist S.
Die Lampe (punktförmig) ist so in die Pyramide eingebaut, dass sie von allen Seitenflächen der Pyramide einen Abstand 1,5m hat.
Gib die Koordinaten dieser Lampe an.

Hinweis: Die Seitenwand ABS der Pyramide liegt in der Ebene $S: 5x_1 - 7x_2 - x_3 = -156$; dieses Ergebnis darf für die Berechnung verwendet werden. (3VP)

Übungsklausur Geometrie 2 (Trinkglas)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $\vec{n_E}=\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix};\vec{m_g}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix};\quad \vec{n_E}\cdot\vec{m_g}=4\cdot1+2\cdot2+(-4)\cdot2=4+4-8=0\Rightarrow\vec{n_E}\perp\vec{m_g}\Rightarrow g\,||\,E$ (1,5P)

b) $|\vec{n_E}|=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=\sqrt{16+4+16}=\sqrt{36}=6$

HNF $E:\dfrac{4x_1+2x_2-4x_3-2}{6}=0$ (1P)

$d=\left|\dfrac{4\cdot(-2)+2\cdot10-4(-2)-2}{6}\right|=\left|\dfrac{-8+20+8-2}{6}\right|=\dfrac{18}{6}=3$ (1P) **3,5P**

2) a) $\vec{AB}=\begin{pmatrix}5-8\\0-1\\9-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix};\vec{AC}=\begin{pmatrix}4-8\\2-1\\10-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix};\vec{BC}=\begin{pmatrix}4-5\\2-0\\10-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ (1,5P)

$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=3-2-1=0\Rightarrow$ ABC bei B rechtwinklig. (1P)

b) $\vec{AD}=\vec{BC}\Rightarrow\begin{pmatrix}d_1-8\\d_2-1\\d_3-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow D(7|3|11)$ (1P) **3,5P**

3) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$

(1) Hilfsebene: $E:2x_1-2x_2+2x_3=b$ P in E: $b=20\Rightarrow E:2x_1-2x_2+2x_3=20$ (1P)

(2) SP: $2\cdot(6+2t)-2(3-2t)+2\cdot(4+2t)=20\Leftrightarrow\boxed{t=0,5}\Rightarrow\boxed{L(7|2|5)}$ (1,5P)

(3) Abstand $d=\vec{PL}=\left|\begin{pmatrix}7-6\\2-0\\5-4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$ (0,5P) **3P**

4) a) $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$ RV l. a. $\Rightarrow$ g und h parallel (1,5P)

b) Da die beiden Geraden parallel zur x_1x_2 – Ebene verlaufen
(da RV der Geraden beide $x_3=0$) und die Stützpunkte der Geraden
genau übereinander liegen ergibt sich mit $d=2=a-1\Rightarrow$ $\boxed{a=3}$ (1,5P) **3P**

5) Nur bei C ein Kreuz, denn $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow S(1|0|-1)$ ist Schnittpunkt (4x 0,5P) **2P**

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Geometrie 2 (Trinkglas)

Lösungen Wahlteil:

a) (1) $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\23\\20\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\-3\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\-8\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}\quad E:-4x_2+3x_3=-32$ (2P)

(2) $\cos(\alpha)=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{5}=\frac{3}{5}\Rightarrow\boxed{\alpha=53{,}13^\circ}$ (1,5P)

(3) $d(S,E)=\frac{\left|-4\cdot24+3\cdot13+32\right|}{5}=\frac{25}{5}=5m$ (1,5P) **5P**

b) (1) $g_{Lot}:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\24\\13\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}$ (0,5P)

in E: $-4\cdot(24-4s)+3\cdot(13+3s)=-32\Rightarrow s=1$ (1P)

s in Gerade g_{Lot}: M(5|20|16) (0,5P)

(2) $\overrightarrow{MS}=\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\overset{\text{Richtung}}{\Rightarrow}\underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}}_{\text{Länge 1}}\Rightarrow\overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}5\\24\\13\end{pmatrix}+\frac{7}{5}\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow F(5\,|\,29{,}6\,|\,8{,}8)$ (2P) **4P**

c) Gesucht: Abstand von A zur Geraden g_{Licht}:

Hilfsebene durch A orthogonal zu g_{Licht}: $H: x_1+2x_2+x_3=71$ (1P)

H schneiden mit g_{Licht}: $t+2\cdot(13+2t)+18+t=71\Rightarrow t=4{,}5$

$\Rightarrow L(4{,}5\,|\,22\,|\,22{,}5)$ (1P)

$d(L,A)=\sqrt{0{,}5^2+1^2+2{,}5^2}=2{,}74m$ (0,5P)

2,74m > 2m, d.h. der geforderte Sicherheitsabstand wird eingehalten. (0,5P) **3P**

d) Die Lampe L liegt auf der Gerade g_{Lot} durch S und M: $L(5\,|\,24-4s\,|\,13+3s)$ (1P)

Seitenwand ABS in Koordinatenform: $S: 5x_1-7x_2-x_3=-156$

$d(L,S)=1{,}5\Leftrightarrow\left|\frac{5\cdot5-7(24-4s)-(13+3s)+156}{\sqrt{25+49+1}}\right|=1{,}5$

$\overset{TR}{\Rightarrow}t_1=0{,}52,\ (t_2=-0{,}52)$ (1,5P)

$L(5\,|\,21{,}92\,|\,14{,}56)$ (0,5P) **3P**

Summe: 15 Punkte